Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika

Elementarni zadaci sa ispita iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

Paralelogram $\square HIDR$ preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(D, R)$ a zatim novodobijeni četverougao $\square H'I'D'R'$ rotirati oko tačke D' za ugao od $60°$ u negativnom smjeru.

Zadatak br. 2

Svaka prava koja sadrži presjek dijagonala paralelograma i siječe jednu stranicu, siječe i suprotnu stranicu. Njen odsječak je raspolovljen presječnom tačkom dijagonala. Dokazati.

Zadatak br. 3

Konstruisati pravougli trougao $\triangle ABC$ ako su poznati kateta b i visina h_c koja odgovara hipotenuz)i c.

Zadatak br. 4

Dat je jednakokraki - pravougli trougao $\triangle ABC$ s pravim uglom kod vrha C. Nad stranicom (katetom) BC konstruisan je jednakostranični trougao $\triangle BCD$ (razlikovati dva slučaja, kad je tačka D sa one strane prave $p(A, B)$ sa koje nije tačka C i kad je tačka D sa one strane prave $p(B, C)$ sa koje nije tačka A). Izračunati veličinu ugla $\measuredangle ADB$.

Zadatak br. 5

Dat je konveksan četverougao $\square ABCD$. Izračunati njegovu površinu ako je
$AB + AD = 8\,cm$, $BC = CD$ i $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = 90°$.

Zadatak br. 6

Ako se saberu polovina, četvrtina i osmina ugla α, onda se dobije ugao suplementan uglu α. Koliki je ugao β koji je komplementan sa suplementom ugla α?

Zadatak br. 7

Na pravoj $p(A, B)$ trougla $\triangle ABC$ data je tačka M takva da je $A - B - M$ i $BM \cong BC$. Dokazati da je prava $p(M, C)$ paralelna simetrali ugla.

Zadatak br. 8

Zadan je kvadrat $\square ABCD$ dužine stranice $1\,dm$. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

Zadatak br. 9

Jednakokraki trougao $\triangle ABC$ čiji je obim $O = 64\,cm$, a visina na osovici $h_a = 24\,cm$ rotirati oko vrha B za ugao od $90°$ u pozitivnom smjeru. Izračunati površinu novonastalog rotiranog trougla.

Zadatak br. 10

Konstruisati pravougli trougao kome je data hipotenuza i jedan oštar ugao.

Zadatak br. 11

Kroz datu tačku M van date prave p konstruisati pravu koja siječe datu pravu pod uglom od $20°$. (Ugao od $20°$ konstruisati približno tačno.)

Zadatak br. 12

Jednakokraki trapez $\square ABCD$ sa osnovicom $AB = 7\,cm$ rotirati oko tačke C za ugao od $120°$ u pozitivnom smjeru.

Zadatak br. 13

U trouglu $\triangle ABC$ je $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC$ i težišna linija CM je normalna (ortogonalna) na BD ugla $\measuredangle ABC$. Odrediti uglove trougla $\triangle ABC$.

Zadatak br. 14

Dijagonale u četverouglu $\square JAST$ se polove. Ako je $\measuredangle JAS = 40^\circ$ izračunati ostale uglove u četverouglu. Izračunati i ugao $\measuredangle SJA$.

Zadatak br. 15

U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu $5\,cm$, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

Zadatak br. 16

U trouglu $\triangle ABC$ je $AC = BC$, a visina AD sa simetralom AE ($E \in BC$) ugla $\measuredangle DAC$ gradi ugao od 30°. Naći uglove trougla $\triangle ABC$ i dokazati da je $AE = EC$.

Zadatak br. 17

Dat je kvadrat $\square ABCD$ i unutar njega je odabrana tačka P tako da je trougao $\triangle BCP$ jednakostraničan. Prava AP siječe stranicu CD u tački E. Odrediti mjerni broj ugla $\measuredangle CPE$.

Zadatak br. 18

U četverougao $\square ABCD$ je $AB < BC < CD < AD$ i svake dvije susjedne stranice se razlikuju za $2\,cm$ (izuzev AB i AD). Naći površinu četverougla, ako mu je obim $36\,cm$ i ako dijagonala AC pripada simetrali ugla $\measuredangle BAD$.

Zadatak br. 19

Težišnica i visina iz vrha A u $\triangle ABC$ djele ugao α na tri jednaka dijela. Koliki su uglovi trougla $\triangle ABC$.

Zadatak br. 20

Konstruisati četverougao $\square ABCD$ ako su date dužine njegovih stranica $AB = 8\,cm$, $BC = 6\,cm$, $CD = 5\,cm$ i $AD = 7\,cm$. Da li se u ovaj četverougao može upisati krug?

Zadatak br. 21

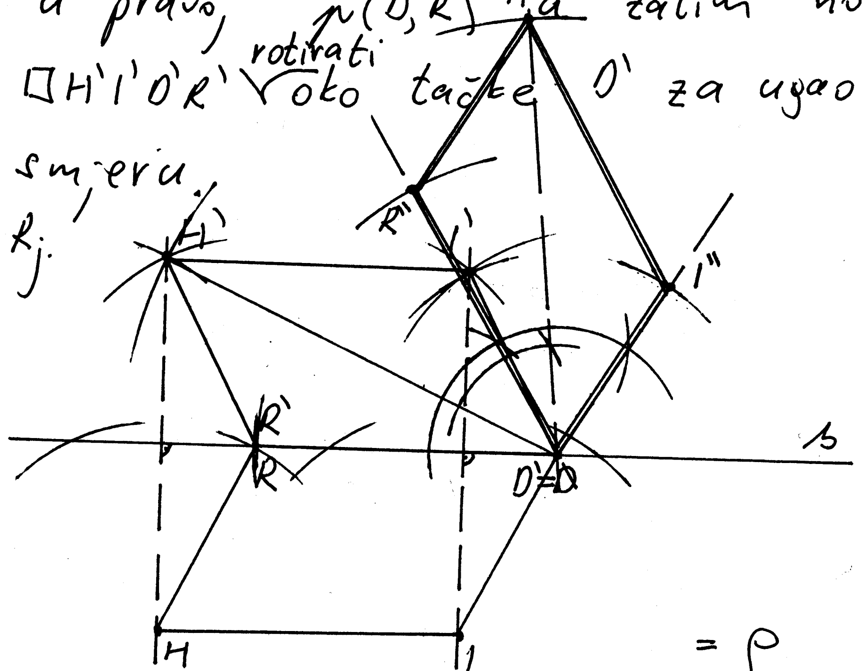
Zadani su ugao $\measuredangle ACB$, poluprava CM unutar ugla $\measuredangle ACB$ i poluprava CS koja polovi $\measuredangle ACB$. Dokazati da je $\measuredangle SCM = \frac{1}{2}(\measuredangle MCA - \measuredangle MCB)$.

Zadatak br. 22

Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

Paralelogram □HIDR preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj p(D,R) a zatim novodobijeni četverougao □H'I'D'R' rotirati oko tačke D' za ugao od 60° u negativnom smjeru.

Rj.



Označimo sa $s = p(D,R)$

$$(\rho_{D',60°,-} \circ \sigma_s)(\square HIDR) =$$

$$= \rho_{D',60°,-}(\sigma_s(\square HIDR)) =$$

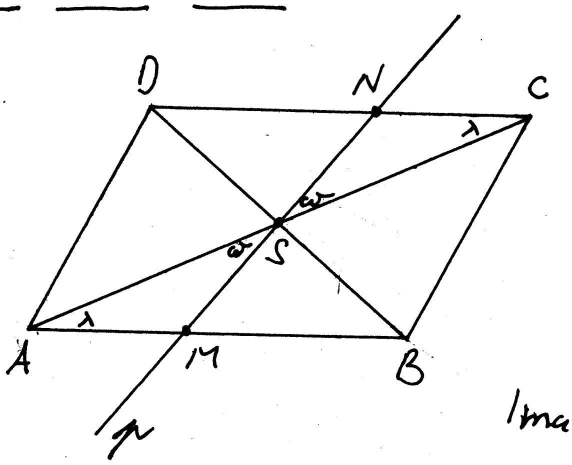
$$= \rho_{D',60°,-}(\square H'I'D'R') = \square H''I''D''R''$$

Svaka prava koja sadrži presjek dijagonala paralelograma i siječe jednu stranicu, siječe i suprotnu stranicu. Njen odsječak je raspolovljen presječnom tačkom dijagonala. Dokazati.

Rj. postavka zadatka:

$\square ABCD$ paralelogram
$AC \cap AB = \{S\}$, prava $p \ni S$
$p \cap AB = \{M\}$, $p \cap CD = \{N\}$

$\Rightarrow$ S sredina MN



$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove $\Rightarrow$
$\Rightarrow AS \cong SC$

$p(A,B) \parallel p(C,D)$; $p(A,C)$ transferzala

$\Rightarrow \measuredangle MAS \cong \measuredangle SCN = \lambda$

Imamo:

$\measuredangle MAS \cong \measuredangle SCN = \lambda$
$AS \cong CS$
$\measuredangle ASM \cong \measuredangle CSN = \omega$

$\overset{USU}{\Longrightarrow} \triangle ASM \cong \triangle CSN$

$\Downarrow$

$MS \cong NS$

$\Downarrow$

S sredina MN

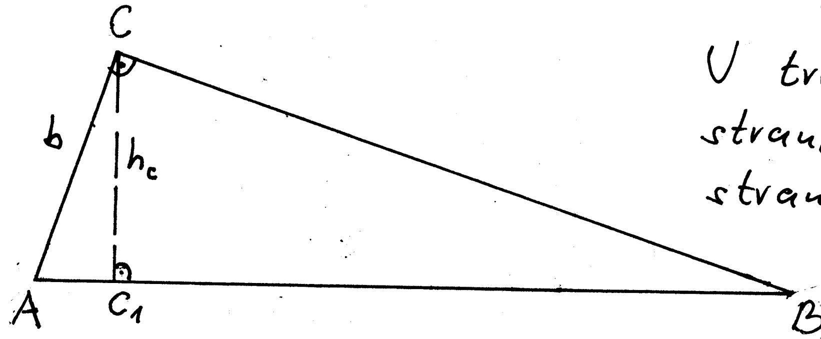
q.e.d.

(#) Konstruisati pravougli trougao ΔABC ako su poznati kateta b i visina h_c koja odgovara hipotenuzi c.

R: **Analiza**

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je data kateta b, visina h_c i neka je ΔABC traženi pravougli trougao.

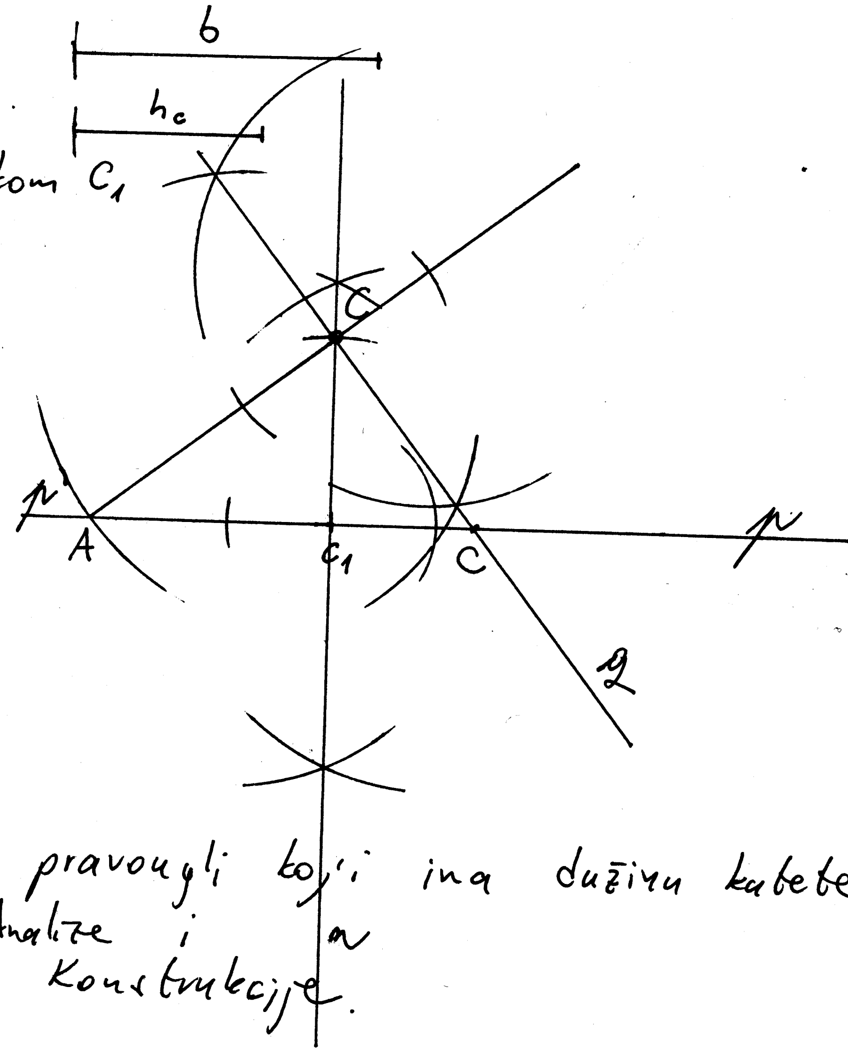
$CC_1 = h_c$



U trouglu ΔAC_1C imamo dvije stranice i ugao naspram veće stranice pa ga možemo konstruisati. Kako je poznato da je ugao $\measuredangle ACB = 90°$ to ćemo tačku B dobiti na presjeku $p(A, C_1)$ i prave koja sadrži C i okomita je na $p(A, C)$. Pa ΔABC možemo konstruisati.

Konstrukcija

1. b, h_c
2. polupravu p' sa početnom tačkom C_1
3. n, $n \ni C_1$ i $n \perp p'$
4. $k(C_1, h_c) \cap n = \{C\}$
5. $k(C, b) \cap p' = \{A\}$
6. pravu p, $p \supseteq p'$
7. pravu q, $q \ni C$ i $q \perp p(A, C)$
8. $p \cap q = \{C\}$
9. ΔABC



Dokaz

Da je konstruisani trougao pravougli koji ima dužinu katete b i visinu h_c slijedi iz Analize i Konstrukcije.

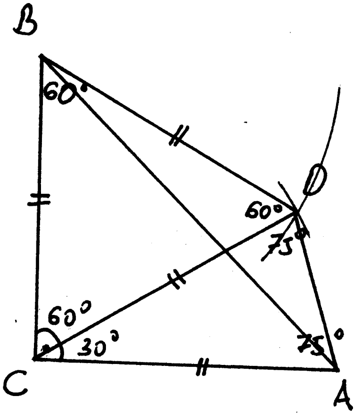
Diskusija

Za slučaj kad je $b \leq h_c$ zadatak nema rješenja.
Za slučaj kad je $b > h_c$ zadatak ima jedinstveno rješenje.

(#) Dat je jednakokraki-pravougli trougao ΔABC s pravim uglom kod vrha C. Nad stranicom (katetom) BC konstruisan je jednakostranični trougao ΔBCD (razlikovati dva slučaja, kad je tačka D sa one strane prave $p(A,B)$ sa koje nije tačka C i kad je tačka D sa one strane prave $p(B,C)$ sa koje nije tačka A). Izračunati veličinu ugla $\measuredangle ADB$.

Rj.

a)



ΔBCD jks $\Rightarrow \measuredangle DBC = \measuredangle BCD = \measuredangle CDB = 60°$

ΔABC pravougli $\Rightarrow \measuredangle ACD = 30°$

ΔACD jkk sa osnovicom AD

$\Rightarrow \measuredangle CAD = \measuredangle ADC = 75°$

$\measuredangle ADB = 135°$

b)

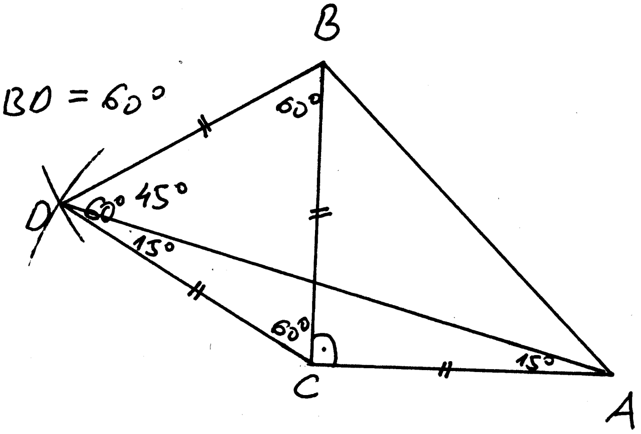
ΔBCD jkk $\Rightarrow \measuredangle BCD = \measuredangle BDC = \measuredangle CBD = 60°$

$\measuredangle ACD = 150°$

ΔACD jkk sa osnovicom AD

$\Rightarrow \measuredangle CAD = \measuredangle ADC = 15°$

$\measuredangle ADB = 45°$



(#) Dužine stranica trougla su tri uzastopna neparna broja, pri čemu je zbir dužina dviju dužih stranica za 7 cm manji od trostruke dužine najmanje stranice. Koliki je obim tog trougla? Odgovor obrazložiti.

Rj. $n, n+2, n+4$ – tri uzastopna neparna broja, n neparan broj
– stranice trougla

$$(n+2)+(n+4)+7=3n$$

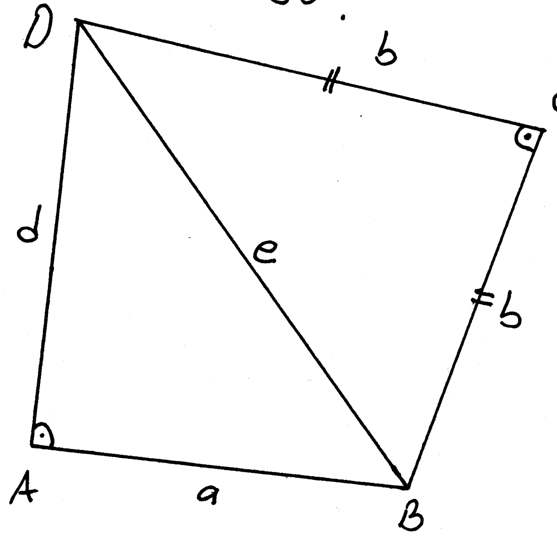
$$2n+13=3n$$

$$n=13$$

Stranice trougla su dužina 13, 15 i 17 cm a obim trougla je 45 cm.

(#) Dat je konveksan četverougao □ABCD. Izračunati njegovu površinu ako je $AB+AD=8$ cm, $BC=CD$, $\angle BAD=\angle BCD=90°$.

Rj.



Uvedimo oznake

$AB=a$, $AD=d$, $BC=CD=b$

Znamo da je $a+d=8$.

Neka je $BD=e$

$e^2=a^2+d^2$ ($\triangle ABD$ je pravougli)

$$(a+d)^2=8^2$$

$$a^2+2ad+d^2=64$$

$$a^2+d^2=64-2ad=e^2 \quad \ldots(*)$$

$e^2=b^2+b^2=2b^2 \quad \ldots(**)$ ($\triangle BCD$ pravougli)

Iz $(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ $2b^2=64-2ad \quad /:2$

$$b^2=32-ad$$

$$\left.\begin{aligned} P_{\triangle ABD}&=\frac{a\cdot d}{2} \\ P_{\triangle BCD}&=\frac{b\cdot b}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_{\square ABCD}=P_{\triangle ABD}+P_{\triangle BCD}=\frac{ad}{2}+\frac{b^2}{2}=\frac{ad+32-ad}{2}=\frac{32}{2}$$

$$P_{\square ABCD}=16 \text{ cm}^2$$

(#) Ako se saberu polovina, četvrtina i osmina ugla α, onda se dobije ugao suplementan uglu α. Koliki je ugao β koji je komplementan sa suplementom ugla α?

Rj

$\gamma + \alpha = 180^\circ$, α i γ su suplementni ugao

$\beta + \gamma = 90^\circ$, β i γ su komplementni uglovi

$\gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{8} = \frac{4\alpha + 2\alpha + \alpha}{8} = \frac{7\alpha}{8}$

$\frac{7\alpha}{8} + \frac{8\alpha}{8} = 180^\circ \quad /\cdot 8$

$15\alpha = 1440^\circ \quad /:3$

$5\alpha = 480^\circ \quad /:5$

$\alpha = 96^\circ$

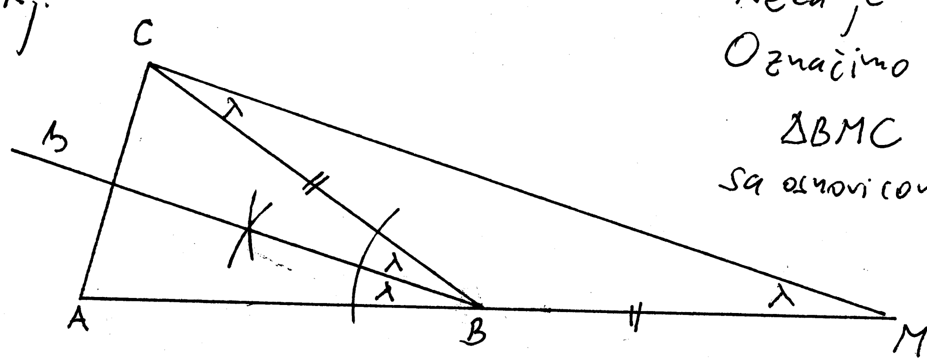
$\Rightarrow \gamma = 84^\circ$

$\Downarrow$

$\beta = 6^\circ$

(#) Na pravoj $p(A,B)$ trougla ΔABC data je tačka M takva da je $A-B-M$ i $BM \cong BC$. Dokazati da je prava $p(M,C)$ paralelna simetrali ugla.

Rj



Neka je s simetrala ugla $\measuredangle ABC$.

Označimo sa $\lambda = \measuredangle ABs \cong \measuredangle CBs$

$\left.\begin{array}{l}\Delta BMC \text{ jkk} \\ \text{sa osnovicom } MC\end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle BMC = \measuredangle MCB$

Kako je $\measuredangle ABC = 2\lambda$ i

$\measuredangle ABC = \measuredangle BMC + \measuredangle MCB$

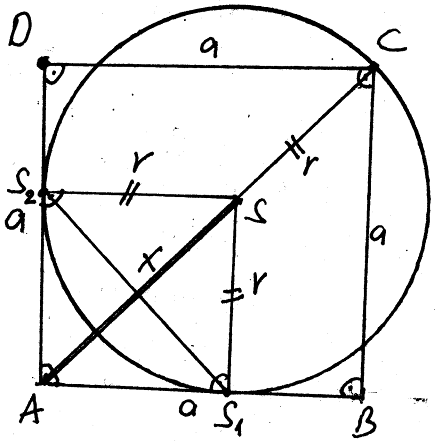
$\Rightarrow \measuredangle BCM \cong \measuredangle BMC = \lambda$

Sad na pravoj $p(A,B)$ imamo $\measuredangle ABs = \measuredangle AMC = \lambda \Rightarrow s \parallel p(M,C)$

q.e.d.

Zadan je kvadrat □ABCD dužine stranice 1 dm. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

Rj.



Označimo sa r poluprečnik, a sa S centar kružnice koja dodiruje stranice AB u S_1 a stranicu AD u S_2.
Primjetimo da je četverougao □AS_1SS_2 kvadrat (imamo sve četri ugla po $90°$ i $SS_1 \cong SS_2 = r$).
Označimo sa x stranicu AS.
U $\triangle ABC$ imamo $(x+r)^2 = a^2 + a^2$ tj.

$$(x+r)^2 = 2 \Rightarrow x + r = \sqrt{2} \quad \dots (1)$$

U $\triangle AS_1S$ imamo $x^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow x^2 = 2r^2 \Rightarrow x = r\sqrt{2}$

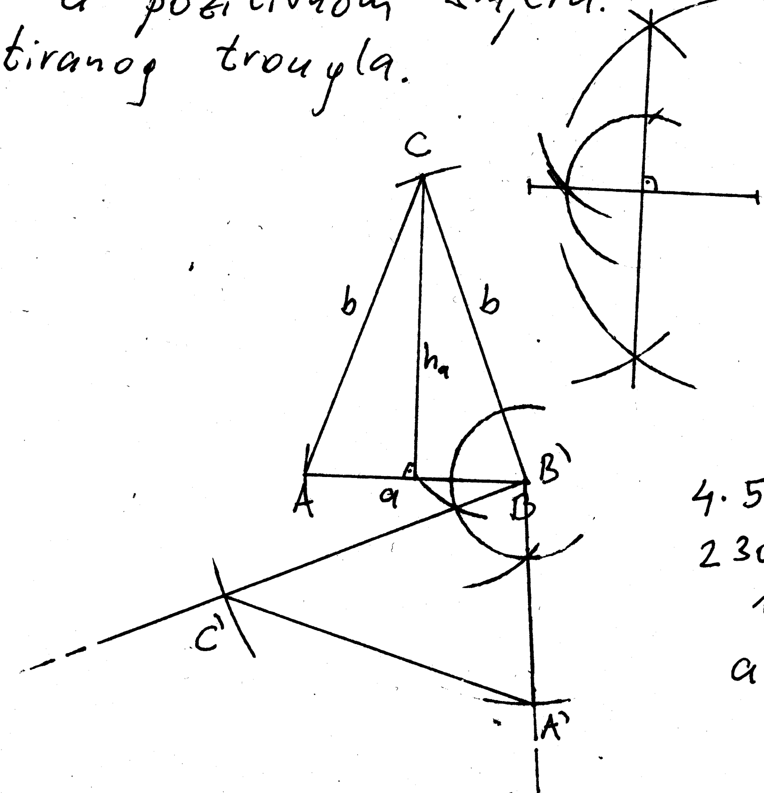
$$(1) \Rightarrow r\sqrt{2} + r = \sqrt{2}$$

$$r(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)} = \frac{2-\sqrt{2}}{2-1}$$

tj. $r = 2 - \sqrt{2}$ q.e.d.

Jednakokraki trougao $\triangle ABC$ čiji je obim $O = 64$ cm, a visina na osnovici $h_a = 24$ cm rotirati oko vrha B za ugao od $90°$ u pozitivnom smjeru. Izračunati površinu novonastalog rotiranog trougla.

Rj.



Rotacija čuva dužine pa su novonastali trougao $\triangle A'B'C'$ i $\triangle ABC$ podudarni.

$O = 2b + a = 64 \Rightarrow 2b = 64 - a$

$h_a^2 = b^2 - (\frac{a}{2})^2 \qquad 4b^2 = (64-a)^2$

$24^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} \quad / \cdot 4 \qquad = 4096 - 128a + a^2$

$4 \cdot 576 = 4b^2 - a^2$

$2304 = 4096 - 128a$

$128a = 1792$

$a = 14$ cm

$P = \frac{a \cdot h_a}{2}$

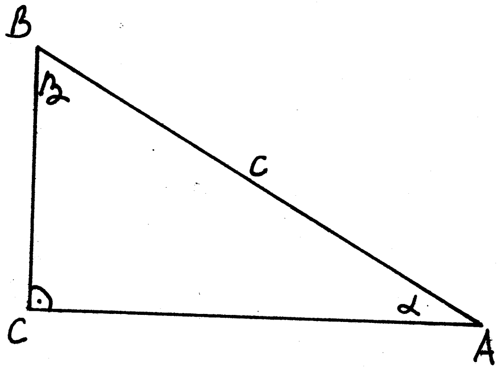
$P = \frac{14 \cdot 24}{2} = 7 \cdot 24$

$P = 168$ cm^2

Konstruisati pravougli trougao kome je data hipotenuza i jedan oštar ugao.

Rj: Analiza

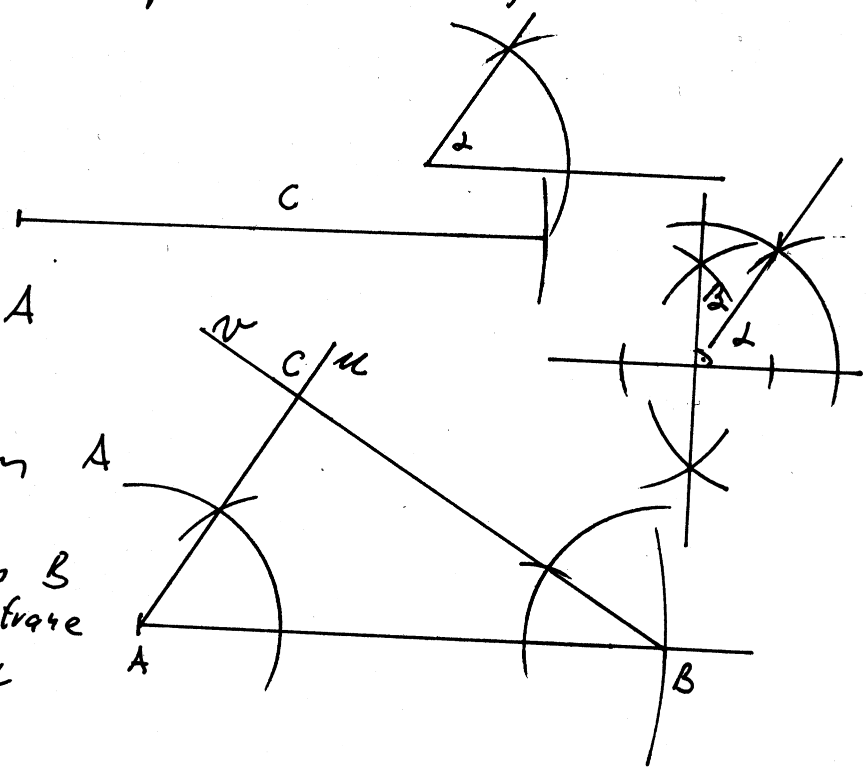
Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABC pravougli



trougao koji ima dat ugao α i dužinu hipotenuze c. U trouglu su poznata dva ugla ($90°$ i α) pa možemo izračunati ugao β po formuli $\beta = 90° - \alpha$. ($\alpha+\beta+90°=180°$) Kako imamo hipotenuzu c i dva nalegla ugla na nju, pomoću pravila USU nije teško konstruisati traženi trougao

Konstrukcija

1. α, c ($\alpha < 90°$)
2. $\beta = 90° - \alpha$
3. pp p sa početnom tačkom A
4. $k(A, c) \cap p = \{B\}$
5. pp u sa početnom tačkom A takvu da je $\measuredangle BAu = \alpha$
6. pp v sa početnom tačkom B koja se nalazi sa iste strane $p(A,B)$ sa koje je i pp u takva da je $\measuredangle AB\vec{v} = \beta$
7. $u \cap v = \{C\}$
8. ΔABC



Dokaz

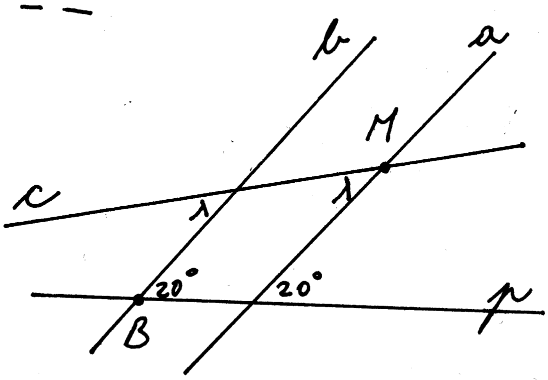
Da je konstruisani trougao pravougli koji ima dužinu hipotenuze c jednaku dužini date duži slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

Zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje

(#) Kroz datu tačku M van date prave p konstruisati pravu koja siječe datu pravu pod uglom od $20°$. (Ugao od $20°$ konstruisati približno tačno).

Analiza



Pretpostavimo da je zadatak rješen. Neka je a tražena prava koja sadrži tačku M i siječe pravu p pod uglom od $20°$. Neka je B proizvoljna tačka na pravoj p. Kroz tačku B nije teško konstruisati pravu b koja siječe pravu p pod uglom od $20°$. Neka je c proizvoljna prava koja sadrži tačku M i siječe pravu b.

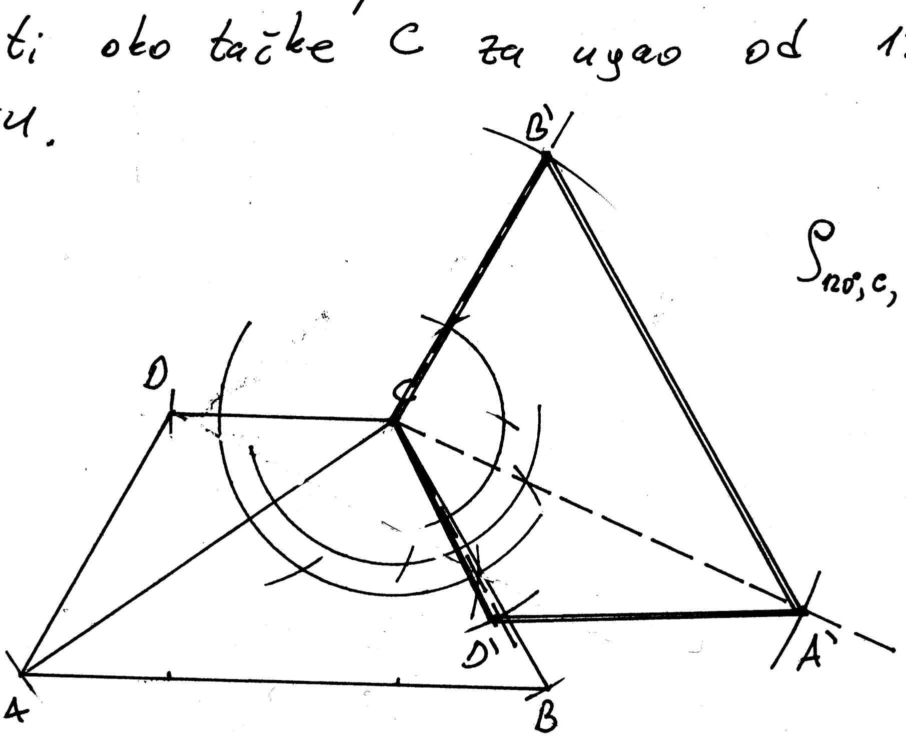
Primjetimo da su prave a i b paralelne i da je c transverzala pa imamo dva ugla λ na pravoj c.

Prema tome, B je proizvoljna tačka pa pravu b možemo konstruisati, c je proizvoljna prava kroz tačku M pa i traženu pravu a možemo konstruisati.

(#) Jednakokraki trapez $\square ABCD$ sa osnovicom $AB = 7$ cm rotirati oko tačke C za ugao od $120°$ u pozitivnom smjeru.

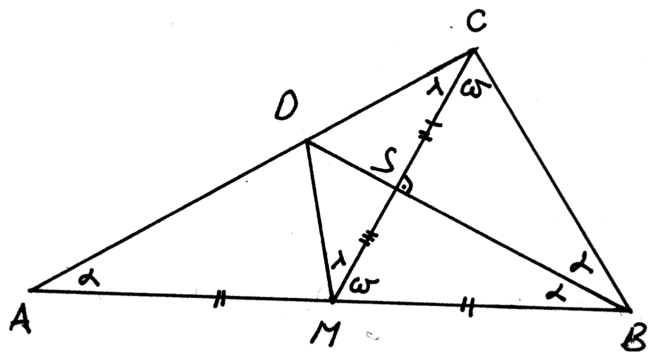
Rj.

$$\mathcal{S}_{120°, C, +}(\square ABCD) = \square A'B'CD'$$



U trouglu ΔABC je $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC$ i težišna linija CM je normalna (ortogonalna) na BD ugla $\measuredangle ABC$. Odrediti uglove trougla ΔABC.

Rj.



CM težišna duž

BD simetrala   BD simetrala i

Kako je $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC = 2\alpha$

to je $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ABD$ jkk sa osnovicom $AB \Rightarrow DM$ visina trougla ΔABD

Neka je $\{S\} = CM \cap BD$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MSB \cong \measuredangle CSB = 90^\circ \\ BS \cong BS \\ \measuredangle MBS \cong \measuredangle CBS = \alpha \end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \Delta MBS \cong \Delta CBS$$

$$\Downarrow$$

$$MS \cong CS \text{ i } \measuredangle BMS \cong \measuredangle BCS = \omega$$

Dalje imamo

$$\left.\begin{array}{l} MS \cong CS \\ \measuredangle MSD \cong \measuredangle CSD = 90^\circ \\ DS \cong DS \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta MSD \cong \Delta CSD$$

$$\Downarrow$$

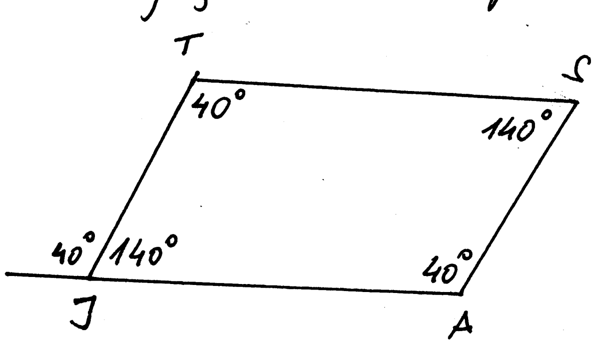
$$\measuredangle DMS \cong \measuredangle DCS = \lambda$$

$\gamma = \lambda + \omega$ i $\lambda + \omega = 90^\circ$ (DM je visina ΔABD) $\Rightarrow \gamma = 90^\circ$

$3\alpha + \gamma = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$ i $\beta = 60^\circ$

Dijagonale u četverouglu $\square JAST$ se polove. Ako je $\measuredangle JAS = 40^\circ$ izračunati ostale uglove u četverouglu. Izračunati i ugao $\measuredangle SJA$.

Rj. dijagonale se polove $\Rightarrow \square JAST$ je paralelogram



$\measuredangle AJT = 140^\circ$

$\measuredangle JTS = 40^\circ$

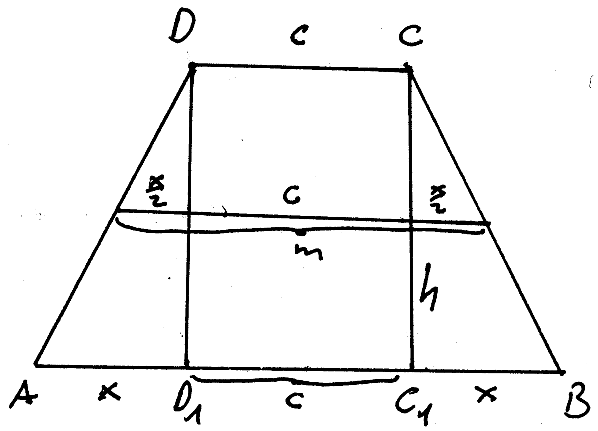
$\measuredangle TSA = 140^\circ$

$\measuredangle SJA$ se ne može izračunati (u paralelogramu dijagonala nije simetrala ugla).

U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu 5 cm, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

Rj. Koristim oznake sa slike.

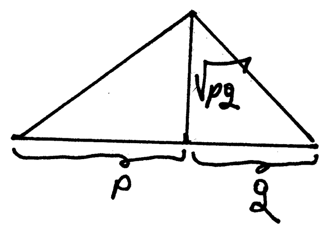
I način: $P = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h$



$m = 5$ cm

$AC = 10$ cm

Iskoristiću poznatu činjenicu da je



$\Rightarrow \quad h = \sqrt{(x+c)\cdot x}$

$m = 5 \Rightarrow x + c = 5 \Rightarrow h = \sqrt{5x}$

$AC^2 = AC_1^2 + CC_1^2 = (x+c)^2 + h^2 = 25 + 5x \Rightarrow$

$AC^2 = 10^2 = 100$

$\Downarrow$

$5x = 75$

$x = 15$

$h = \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$

$P = 25\sqrt{3}$ cm^2

II način:

$m = \frac{a+c}{2} = 5$ cm

$a + c = 10$ cm

$x = \frac{a-c}{2}$

$AC_1 = a - x = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2} = 5$

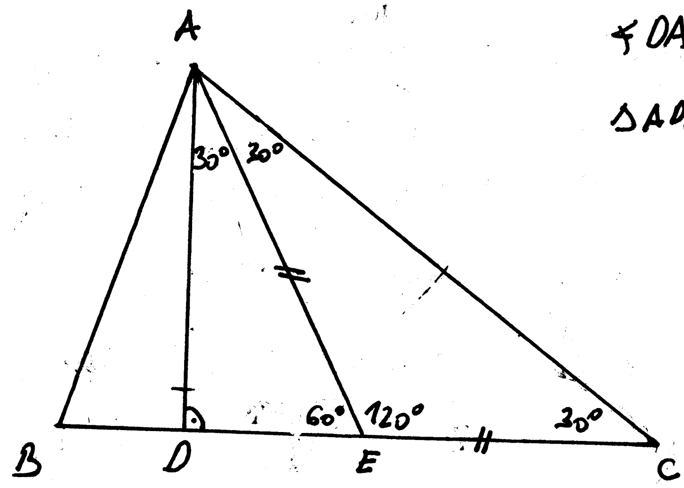
$h^2 = AC^2 - h^2 = 100 - 25 = 75$

$h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$P = 5 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$ cm^2

(#) U trouglu ΔABC je $AC = BC$, a visina AD sa simetralom AE $(E \in BC)$ ugla $\measuredangle DAC$ gradi ugao od $30°$. Nađi uglove trougla ΔABC i dokazati da je $AE = EC$. Odgovor obrazložiti!

Rj.



$\alpha = 75°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 30°$

$\measuredangle DAE \cong \measuredangle CAE = 30°$

ΔADE pravougli $\Rightarrow \measuredangle AEC = 120°$ (vanjski ugao ΔADE)

$\Rightarrow \measuredangle ACE = 30° \Rightarrow \Delta AEC$ jk

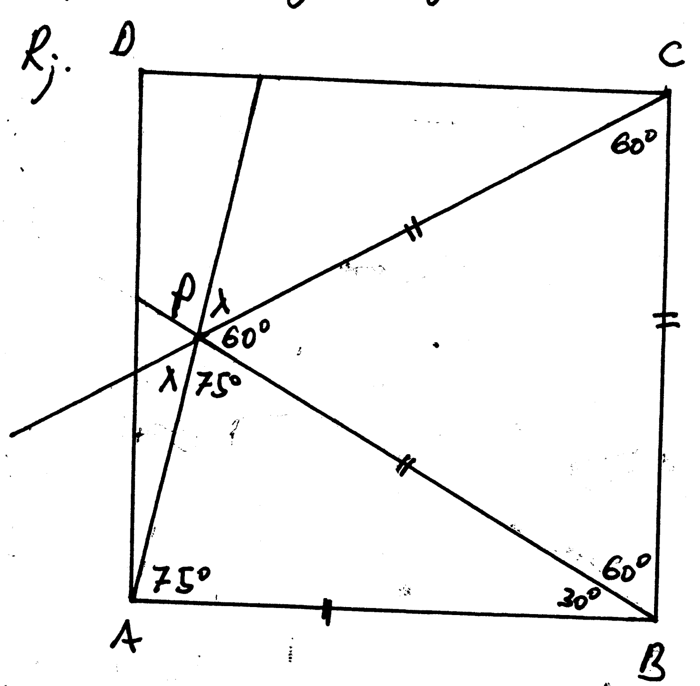
tj. $AE = EC$

ΔABC jk $\Rightarrow$

$\measuredangle CAB \cong \measuredangle CBA = 75°$

(#) Dat je kvadrat $\square ABCD$ i unutar njega je odabrana tačka P tako da je trougao ΔBCP jednakostraničan. Prava AP siječe stranicu CD u tački E. Odrediti mjerni broj ugla $\measuredangle CPE$. Odgovor obrazložiti!

Rj.



ΔBCP jk $\Rightarrow$ ima uglove po $60°$

$\measuredangle ABC = 90° \Rightarrow \measuredangle ABP = 30°$

$AB \cong BP \cong BC \Rightarrow \Delta ABP$ jk

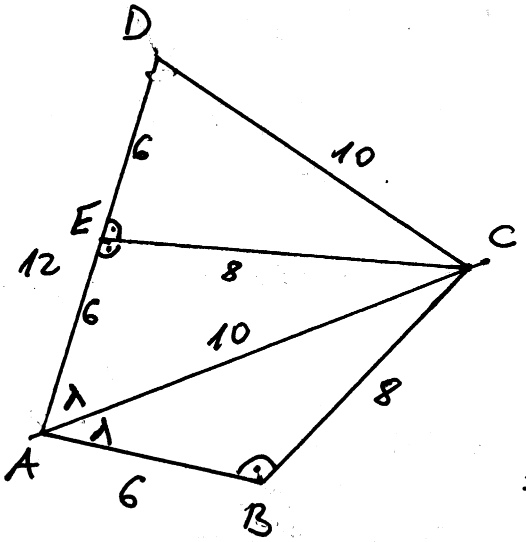
$\Rightarrow \measuredangle BAP \cong \measuredangle APB = 75°$

$\lambda + 60° + 75° = 180°$

$\lambda = 45°$

(#) U četverouglu $\square ABCD$ je $AB < BC < CD < AD$ i svake dvije susjedne stranice se razlikuju za 2 cm (izuzev AB i AD). Naći površinu četverougla, ako mu je obim 36 cm i ako dijagonala AC pripada simetrali ugla $\measuredangle BAD$.

Rj.



$AB < BC, \quad BC - AB = 2 \Rightarrow BC = AB + 2$

$BC < CD, \quad CD - BC = 2 \Rightarrow CD = AB + 4$

$CD < AD, \quad AD - CD = 2 \Rightarrow AD = AB + 6$

$O = 36\text{ cm} \Rightarrow$

$AB + BC + CD + AD = 36$ tj. $4AB + 12 = 36$

$AB = 6$

$\Rightarrow BC = 8, \; CD = 10$ i $AD = 12$

Dijagonala AC leži na dijagonali. Uzmimo tačku $E \in AD$ takvu da je $AE = 6$. Iz podudarnosti SUS $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle AEC$

$\Downarrow$

$AB \cong AE = 6$ cm

$\triangle ECD$ je pravougli

$10^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow \measuredangle AEC \cong \measuredangle DEC = 90^\circ \Rightarrow AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

$AC = 10$

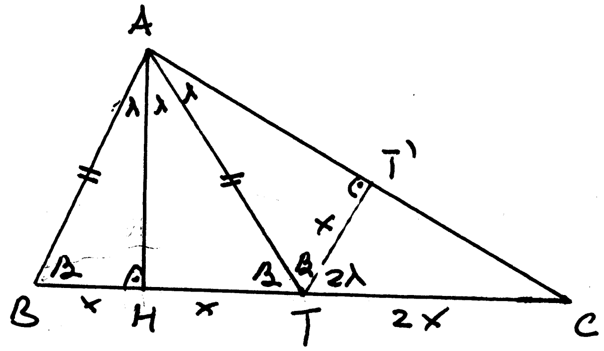
$$P_{\triangle ACD} = \frac{AD \cdot h_{AD}}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$$

$$P_{\square ABCD} = 72\text{ cm}^2$$

Težišnica i visina iz vrha A u ΔABC dijele ugao α na tri jednaka dijela. Koliki su uglovi trougla ΔABC?

Rj.



Uvedimo oznake za vrhove i uglove kao na slici.
Primjetimo da je zbog podudarnosti USU $\Delta AHB \cong \Delta AHT$

$$\Downarrow$$

$$BH \cong HT = x$$

Neka je T' ortogonalna projekcija tačke T na AC.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle TT'A \cong \sphericalangle ABH = 90^\circ \\ \sphericalangle TAT' \cong \sphericalangle BAH = \lambda \\ TA \cong BA \end{array}\right\} \stackrel{UUS}{\Longrightarrow} \Delta TT'A \cong \Delta BHA$$

$$\Downarrow$$

$$BH \cong TT' = x \quad i \quad \sphericalangle T'TA \cong \sphericalangle HBA = \beta$$

Kako je $2\beta + 2\lambda = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle CTT' = 2\lambda$. $\Delta TT'C$ je pravougli pa

$$\cos 2\lambda = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\lambda = 60^\circ \Rightarrow \lambda = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 90^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \gamma = 30^\circ$$

Konstruisati četverougao $\square ABCD$ ako su date dužine njegovih stranica $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 5$ cm i $AD = 7$ cm. Da li se u ovaj četverougao može upisati krug?

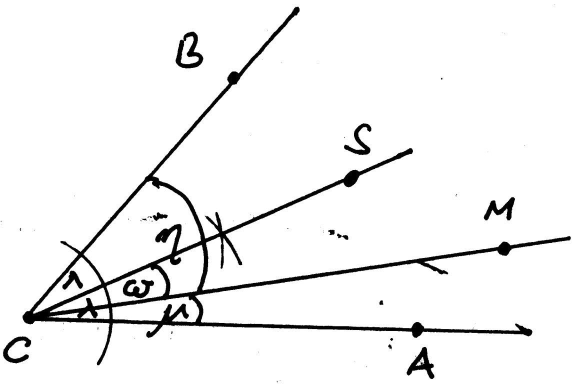
Rj. Kako ne znamo ni jedan ugao u četverouglu i znam samo stranice četverougla, četverougao ne možemo konstruisati.

U četverougao se može upisati krug

$$AB + CD = BC + AD \quad \text{(četverougao je tangentni)}$$

Zadani su ugao $\measuredangle ACB$, poluprava CM unutar ugla $\measuredangle ACB$ i poluprava CS koja polovi $\measuredangle ACB$. Dokazati da je
$$\measuredangle SCM = \frac{1}{2}(\measuredangle MCA - \measuredangle MCB).$$

Rj:



Uvedimo oznake:

$\lambda = \measuredangle ACS \cong \measuredangle SCB$

$\omega = \measuredangle SCM$

$\mu = \measuredangle MCA$ i $\eta = \measuredangle MCB$.

Trebamo pokazati da je
$$\omega = \frac{1}{2}(\mu - \eta)$$

$\omega = \lambda - \mu$

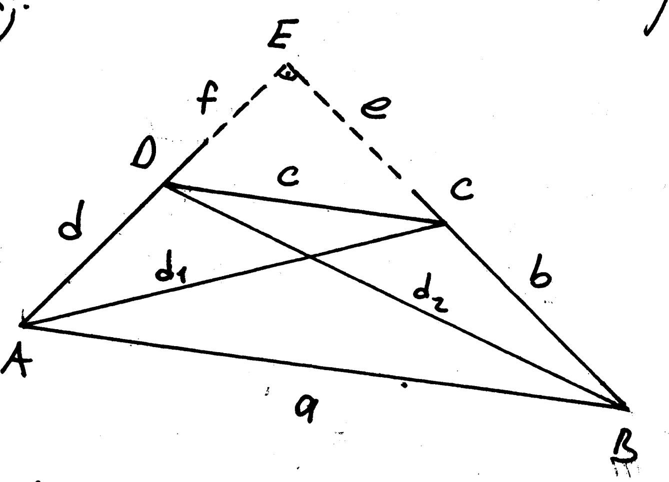
$\omega = \eta - \lambda$

tj.
$$\measuredangle SCM = \measuredangle ACS - \measuredangle MCA$$
$$\measuredangle SCM = \measuredangle MCB - \measuredangle SCB \quad + \; (\measuredangle ACS \cong \measuredangle SCB)$$
$$2\measuredangle SCM = \measuredangle MCB - \measuredangle MCA$$
$$\measuredangle SCM = \frac{1}{2}(\measuredangle MCB - \measuredangle MCA)$$

q.e.d.

Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

Rj:



Uvedimo oznake kao na slici.

ΔACE je pravougli sa hipotenuzom AC

$d_1^2 = (d+f)^2 + e^2 \quad \ldots (1)$

ΔBDE je pravougli sa hipotenuzom BD

$d_2^2 = (b+e)^2 + f^2 \quad \ldots (2)$

ΔABE je pravougli sa hipotenuzom $AB \Rightarrow a^2 = (d+f)^2 + (e+b)^2$

ΔDCE je pravougli sa hipotenuzom $CD \Rightarrow c^2 = e^2 + f^2$

$(1)+(2) \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = (d+f)^2 + e^2 + (b+e)^2 + f^2 = a^2 + c^2$

tj. $d_1^2 + d_2^2 = a^2 + c^2$

q.e.d.